Voorronde Nederlandse Sterrenkunde Olympiade 2021
Antwoorden

1 Meerkeuzevragen (Totaal: 10pt)

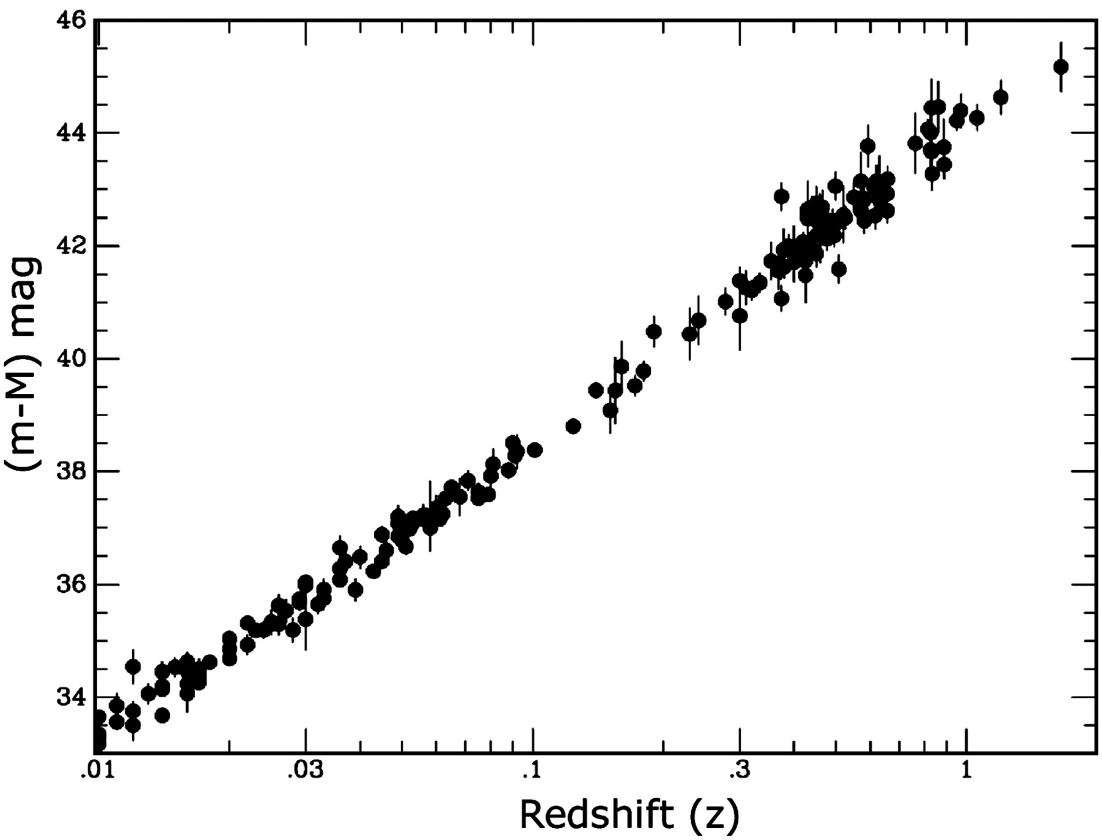
1. A
2. B
3. D - Kan berekend worden door gebruik te maken van $L \propto R^2T^4$
4. A
5. A
6. A
7. C
8. D
9. C - Kan berekend worden door de magnitude in een afstand om te zetten en dat te gebruiken om de straal van de nevel in kilometers uit te rekenen. Deel dit door de leeftijd en viola, hier heb je je antwoord!
10. E

2 Open vragen

2.1 Hubble's guide to the galaxy (Totaal: 15pt)

a. **Totaal:** [**4pt**] Uit figuur 1 kan twee punten gehaald worden (0.01, 33.5) en (1, 43.9) op een lijn. Omrekenen met behulp van $z \approx v/c$ en $m - M = -5 + 5\log_{10}(d)$ geeft (3×10^3 km/s, 50 Mpc) en (3×10^5 km/s, 6×10^3 Mpc). Twee punten kiezen en dit op de juiste manier omrekenen met correcte formules [**3pt**] (een gedeelte van de punten kan gegeven worden als gedeeltelijk hieraan voldaan wordt). De richtingscoëfficiënt uitrekenen geeft 50 km/s/Mpc [**1pt**]. Een relatief kleine fout kan al grote gevolgen hebben door de logaritme, dit kan een probleem zijn.

b. **Totaal:** [**2pt**] De eenheid van de Hubble constante kan omgezet worden in s^{-1} door gebruik te maken van 1 Mpc = 3.086×10^19 km. Dit geeft, met de gevonden waarde van de vorige opdracht, $t_{\text{heelal}} = H^{-1} = 6.2 \times 10^{17}$ s = 20 Gjr. Gebruikmakend van de doorrekenwaarde (100 km/s/Mpc) t_{heelal} = 10 Gjr. Beseffen dat de leeftijd van het heelal gelijk is aan H^{-1} [**1pt**], op de juiste manier uitrekenen [**1pt**]



Figuur 1: Bron:https://www.pnas.org/content/101/1/8/F4

c. **Totaal:** [**2pt**] Hiervoor gebruiken we dat $v = zc$ en $v = H_0 d$, dus $d = cz/H_0 = 87.5$ Mpc $= 2.70 \times 10^{24}$ m. (Herbij is de werkelijke H_0 gebruikt van 67 km/s/Mpc) Juiste formule gebruiken [**1pt**], correct invullen [**1pt**].

d. **Totaal:** [**4pt**] Voor de afstand van het gas realiseren we ons dat langs de halve lange as gemeten de hoekafstand precies de echte baanstraal van het gas geeft, dus r $= d \times \theta =$ 29.7 kpc ($= 9.16 \times 10^{20}$ m) [**1pt**]. Voor de baansnelheid realiseren we ons dat de radiële snelheid van het gas gegeven wordt door $v_r = c\Delta\lambda/\lambda_0 = 128$ km/s [**2pt**] 1pt voor de juiste formule, 1pt voor het correct invullen. Dan moeten we nog rekenen dat deze nog voor de inclinatie moet worden gecorrigeerd: $v_r = v \sin i = 0.500v$, dus $v = 257$ km/s [**1pt**]. (Zowel de golflengte van de lijn in het centrum als die op de lange as hebben natuurlijk ook een roodverschuiving van het hele stelsel, maar die factor is hetzelfde voor $\Delta\lambda$ als voor λ, dus heeft netto geen effect.) Met de doorrekenwaarde voor de afstand vind je 33.9 kpc.

e. **Totaal:** [**3pt**] Hiervoor nemen we aan dat het gas de cirkelsnelheid heeft van een bolvormige massaverdeling binnen zijn baanstraal, $v = \sqrt{GM_r/r}$ [**1pt**] zodat $M_r = rv^2/G$ [**1pt**]. Invullen van de waarden uit (b) levert dan $M_r = 9.07 \times 10^{41}$ kg $= 4.6 \times 10^{11}$ $M_\odot$ [**1pt**]. (Met de doorrekenwaarden vind je $M_r = 5.2 \times 10^{11}$ $M_\odot$.)

2.2 Tijd voor zwarte gaten (Totaal: 9pt)

a. **Totaal: [2pt]** Online of in hun boeken kunnen ze vinden dat de Schwarzschild radius gegeven wordt door **[1pt]**:

$$r_S = \frac{2GM}{c^2} \tag{1}$$

Als je dit met de gegeven waardes invult krijg je **[1pt]**:

$$r_S = \frac{2 \times 6.674 \times 10^{-11} \times 10^8 \times 1.988 \times 10^{30}}{(2.998 \times 10^8)^2}$$

$$r_S \simeq 2.9523 \times 10^{11} \text{ [m]}$$

b. **Totaal: [2pt]** Formule omschrijven zodat r geïsoleerd is **[1pt]**:

$$r = \frac{r_s}{1 - (\frac{t_0}{t_f})^2} \tag{2}$$

Vervolgens moeten ze 7 jaar omrekenen naar uren **[1pt]**.

$$r = \frac{2.9523 \times 10^{11}}{1 - (\frac{1}{61320})^2}$$

$$r \simeq 2.952360000785 \times 10^{11} \text{ [m]}$$

c. **Totaal [1pt]** Het verschil tussen de Schwarzschild radius en r is maar 78 m (op de $\simeq 3 \times 10^{11}$ m!). De planeet zou dus veel dichter op het zwarte gat moeten staan.

d. **Totaal [3pt]** Kan berekend worden door de formule voor gravitationele versnelling **[1pt]**:

$$g = -\frac{GM}{r^2} \tag{3}$$

Omschrijven en correct invullen geeft dan **[2pt]**:

$$r = \sqrt{\frac{G \times 10^8 \mathrm{M}_\odot}{100 * 9.81}} \simeq 3.69 \times 10^{12} \text{ [m]} \approx 12 \times r_s$$

e. **Totaal [1pt]:** Spaggetification vindt plaats door de hoge force gradient, ofwel een sterke getijde kracht.

2.3 Spies in the Sky (Totaal: 15pt)

a. **Totaal [4pt]:** $\Delta\theta = \tan(x/h)$. Waar x de resolutie is en h de hoogte van de satelliet [**1pt**]. Omdat $h >> x$, kan je de gegeven formule herschrijven als: $x = 1.22\lambda h/D$ [**2pt**]. Dit leidt tot [**1pt**]:

$$D \simeq \frac{1.22 \times 500 \times 10^{-9} \times 4.5 \times 10^5}{0.5} = 0.549 \text{ [m]}$$

b. **Totaal [1pt]:** Omdat op deze hoogte de satelliet een snelheid aan moet houden (om niet op de aarde to storten) die veel sneller is dan wat nodig zou zijn voor een geostationaire baan.

c. **Totaal [2pt]:** De gravitatie kracht [**1pt**] en de middelpuntzoekende kracht (centripetal force) [**1pt**].

d. **Totaal [5pt]:** De twee formules moeten aan elkaar gelijk gesteld worden [**1pt**]. Vervolgens moet v vervangen worden door $2\pi r/T$ (waar T de periode is) [**1pt**]. Dan kan het herschreven worden als volgt [**1pt**]:

$$r = \left(\frac{GM_aT^2}{4\pi^2}\right)^{1/3} \tag{4}$$

Het invullen van de juiste getallen geeft vervolgens [**1pt**]:

$$r = \left(\frac{6.674 \times 10^{-11} \times 5.972 \times 10^{24} \times (3600 \times 24)^2}{4\pi^2}\right)^{1/3}$$

$$r = 4.224 \times 10^7 \text{ [m]} = 42\ 240 \text{ [km]}$$

Nu moeten ze er rekening mee houden dat dit de afstand is vanaf het centrum van de aarde. Dus als ze de afstand vanaf het oppervlakte willen moeten ze ook nog de straal van de aarde hiervan aftrekken [**1pt**].

$$s = r - r_a = 42\ 240 - 6\ 371 = 35\ 869 \text{ [km]}$$

e. **Totaal [2pt]:** Gebruik makend van wat we voor (a) gevonden hebben [**1pt**] en door de juiste waardes in te vullen [**1pt**]:

$$D \simeq \frac{1.22 \times 500 \times 10^{-9} \times 3.587 \times 10^7}{0.5} = 43.761 \text{ [m]}$$

f. **Totaal [1pt]:** Heel veel meel groter en daardoor dus ook niet echt realistisch.

2.4 Het Goudlokjegebied: Niet te warm en niet te koud, maar precies goed! (Totaal: 21pt)

a. **Totaal** [**4pt**]. Het totale vermogen dat door de planeet wordt opgenomen moet hetzelfde zijn als de hoeveelheid dat uitgestraald wordt $P_{\text{in}} = P_{\text{uit}}$, anders is het geen evenwichtstemperatuur. Met behulp van de albedo en de verhouding tussen de oppervlakten van een bol met de straal gelijk aan de baanstraal van de planeet en de doorsnede van de planeet vinden we:

$$P_{\text{in}} = L_*(1 - A)\frac{\pi R_p^2}{4\pi r^2} \tag{5}$$

Voor het correct opstellen van deze formule [**2pt**]. Het uitstralend vermogen vinden we via de wet van Stefan-Boltzmann:

$$P_{\text{uit}} = 4\pi\sigma R_p^2 T^4 \tag{6}$$

Deze twee vergelijkingen aan elkaar gelijk zetten en uitwerken geeft de gevraagde formule. Voor het correct opschrijven van P_{uit} en oplossen van de gelijkheid [**2pt**].

b. **Totaal** [**2pt**]. Het invullen van de juiste baanstraal en albedo geeft de evenwichtstemperaturen gegeven in tabel 1.

	Venus	Aarde	Mars
A	0.75	0.30	0.15
r_{baan} (au)	0.72	1	1.52
T_{ev} (K)	232	254	217

Tabel 1: De evenwichtstemperaturen van Venus, Aarde en Mars.

Invullen van de juiste waardes en het krijgen van de juiste temperaturen [**1pt**] ([**1/3pt**] per planeet). De eigenlijke temperaturen zijn: Venus 740 K, Aarde 287 K en Mars 226 K. Dit is anders omdat we geen rekening hebben gehouden met de atmosfeer van de planeten. Venus heeft een enorm dichte atmosfeer, vandaar de hoge temperatuur. De Aarde heeft ook een atmosfeer, wat voor de leefbare temperaturen zorgt. Mars heeft ook een atmosfeer, maar dat is wat ijl, vandaar dat de werkelijke temperatuur redelijk in de buurt van de evenwichtstemperatuur zit. Een goede uitleg voor waarom de temperatuur van elke planeet zo anders is [**1pt**].

c. **Totaal** [**4pt**]. De radius van de ster kan berekend worden door gebruik te maken van de verhoudingen van de temperatuur en de lichtkracht en de wet van Stefan-Boltzmann [**1pt**]:

$$\frac{L_*}{L_\odot} = \left(\frac{R_*}{R_\odot}\right)^2 \left(\frac{T_*}{T_\odot}\right)^4 \tag{7}$$

We weten van de tekst dat $L_* = 0.25L_\odot$ en $T_* = 0.83T_\odot$, dit geeft [**1pt**]:

$$R_* = \left(\frac{L_*}{L_\odot}\right)^{1/2} \left(\frac{T_\odot}{T_*}\right)^2 R_\odot = 0.72R_\odot \tag{8}$$

Met hoeveel het licht afneemt hangt alleen af van de verhouding tussen de doorsneden van de ster en de planeet (zie de hint) [**1pt**]:

$$\delta = \left(\frac{R_p}{R_*}\right)^2 = 0.0482\% \tag{9}$$

Door de juiste waarde voor R_* in te vullen krijgen we [**1pt**]:

$$R_p = \sqrt{\delta} R_* = 1.1 \times 10^4 \text{km} \approx 1.72 R_\oplus \tag{10}$$

De planeet is dus iets groter dan de Aarde.

d. **Totaal** [**2pt**]. De gemiddelde dichtheid van de Aarde is $\rho_\oplus$ =5515 kg m^{-3}. De massa kan dan worden berekend: $M_p = \frac{4}{3}\pi R_p^3 \times \rho_\oplus = 3.1 \times 10^{25}$ kg [**1pt**]. De zwaartekrachtsversnelling kan uitgerekend worden met [**1pt**]:

$$g_p = \frac{M_p * G}{R_p^2} = 17 \text{ m s}^{-2} \approx 1.7 \text{ g} \tag{11}$$

e. **Totaal** [**4pt**]. De massa-lichtkracht relatie kan omgeschreven worden in:

$$M_* = \left(\frac{L_*}{L_\odot}\right)^{1/4} M_\odot \tag{12}$$

Dit invullen geeft $M_* = 0.71 M_\odot$. Een juiste omschrijving van de formule en invullen van de formule geeft [**1pt**]. We weten dat de periode 316 dagen is en we hebben zojuist de massa van de ster uitgerekend (en van de planeet), dus we kunnen de derde wet van Kepler gebruiken:

$$\frac{P^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{G(M_* + M_p)} \tag{13}$$

Dit kan omgeschreven worden in:

$$r = \left(\frac{P^2 G(M_* + M_p)}{4\pi^2}\right)^{1/3} \tag{14}$$

Invullen geeft een baanstraal van $r_p = 1.21 \times 10^{11}$ m ≈ 0.81 au. Het gebruiken van de juiste formule en het krijgen van de juiste baanstraal [**2pt**]. De juiste waardes invullen in de vergelijking voor de evenwichtstemperatuur geeft $T = 200$ K. Dus de planeet zit buiten de leefbare zone [**1pt**].

f. **Totaal** [**2pt**]. Een aantal voorbeeld antwoorden:

(a) We hebben geen rekening gehouden met een atmosfeer. Dit zorgt voor een broeikaseffect, waardoor de planeet warmer wordt. Dit kan voor een hogere temperatuur zorgen en het dus leefbaar maken.

(b) We hebben geen rekening met een magnetisch veld gehouden, wat straling behoedt om bij het oppervlak te komen. Dit maakt de planeet leefbaarder.

Voor een goed antwoord en een plausibele uitleg [**2pt**].

g. **Totaal [3pt]**. De massa van de Maan is $M_m = 7.3 \times 10^{22}$ kg en de straal van de Maan is 1737 km. Dit invullen in de formule voor de Roche-limiet geeft $d_{\text{Roche}} = 1.6 \times 10^4$ km **[1pt]**. Het object is gevonden op een afstand van 1.4×10^4 km, dus dichterbij de planeet dan de Roche-limiet. Dit betekend dat het object uit elkaar getrokken moet zijn door de getijdekrachten. Het zou dus een ring zoals bij Saturnus kunnen zijn. Een juiste vergelijking tussen de afstand van het object en de Roche-limiet en de juiste gevolgtrekking over wat het object dan moet zijn **[2pt]**.

h. Vul hier ___ een leuke naam in.